範例 4 旋轉算子

求 $\mathbf{x} = (1, 1)$ 進行以原點為中心逆時針旋轉 $\pi / 6$ 弳度（弳度量為 30°）之後的像。

解

根據 (13) 式，且 $\theta = \pi / 6$，則

$$R_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.37 \\ 1.37 \end{bmatrix}$$

或者表示為 $R_{\pi/6}(1, 1) \approx (0.37, 1.37)$。 ◀

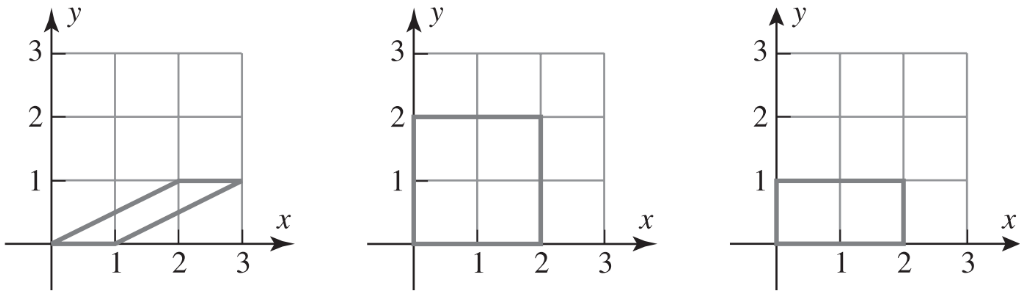
範例 5　R^2 中的一些基本矩陣

試描述以下矩陣算子，並繪製其在 R^2 中對一單位長的方形之轉換效果。

$$\text{(a)}\quad A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \text{(b)}\quad A_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\qquad \text{(c)}\quad A_3=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解

比較上述矩陣和表 7、9、10 的情形，可知矩陣 A_1 為在 x 方向以因子 2 做修剪，矩陣 A_2 為擴張 2 倍，矩陣 A_3 為在 x 方向膨脹 2 倍。這些矩陣算子在 R^2 中對一單位長的方形之轉換效果如圖 7.1.6 所示。 ◀



➲ 圖 7.1.6

範例 6　R^2 中的旋轉算子為一對一

如圖 7.1.8 所示，$T: R^n \to R^n$ 為 R^2 中將向量旋轉 θ 角的一對一旋轉算子。請以定理 7.1.3 確認 $[T]$ 為可逆矩陣。

解

從表 5 可知 T 的標準矩陣為

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

此矩陣為可逆，因為

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$$

範例 7　投影算子非一對一

如圖 7.1.9 所示，$T: R^n \to R^n$ 為 R^3 中將向量投影 xy-平面，其非為一對一算子。請以定理 7.1.3 確認 $[T]$ 為不可逆矩陣。

解

從表 4 可知 T 的標準矩陣為

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此矩陣為不可逆，因為 $\det[T]=0$。　◀

範例 9　求 T^{-1}

$T：R^2 \to R^2$ 算子定義為

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + \ \ x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

證明其為一對一轉換，且求 $T^{-1}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$。

解

以上方程式的矩陣形式為

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所以 T 的標準矩陣為

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

此矩陣為可逆矩陣，所以 T 為一對一轉換。而 T^{-1} 的標準矩陣為

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

因此，

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

由此歸納可得

$$T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2, -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2\right) \quad ◀$$

範例 7　矩陣空間中的轉換

令 M_{nn} 為 $n \times n$ 矩陣所成的向量空間，試決定以下轉換是否為線性？

$$\text{(a)}\quad T_1(A) = A^T \qquad \text{(b)}\quad T_2(A) = \det(A)$$

解

(a) 根據定理 1.3.2 的 (b) 和 (d) 可知

$$T_1(kA) = (kA)^T = kA^T = kT_1(A)$$
$$T_1(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T_1(A) + T_1(B)$$

所以 T_1 為線性轉換。

(b) 根據 2.3 節的 (1) 式可知

$$T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) = k^n T_2(A)$$

因此，若 $n > 1$ 時， T_2 不滿足均質特性。同時加法特性也不成立，因為 2.3 節的範例 1 已經證明， $\det(A+B)$ 和 $\det(A) + \det(B)$ 通常不會相等；所以 T_2 不是線性轉換。

範例 10　求基底向量之像

考慮 R^3 中之基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$，其中

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

令 $T：R^3 \to R^2$ 為線性轉換，且

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式，且依求得之公式計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果。

解

首先將 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 展開為 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 之線性組合為

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

依等號兩邊相對應分量相等，可得

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 \qquad &= x_2 \\ c_1 \qquad\qquad &= x_3 \end{aligned}$$

因此 $c_1 = x_3, c_2 = x_2 - x_3, c_3 = x_1 - x_2$，所以

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

由此公式代入向量 $(2, -3, 5)$ 可知

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

範例 1　擴張與收縮為一對一且映成

試證若 V 為有限維度的向量空間，且 c 為非零純量，則定義為 $T(\mathbf{v})=c\mathbf{v}$ 的線性算子 $T：V \to V$ 是一對一且映成。

解

若 $\mathbf{v}$ 為 V 中的任意向量，則其為 $(1/c)\mathbf{v}$ 的像，所以 T 為映成，也因此為一對一。

範例 3　移位算子

令 $V = R^\infty$ 為 4.1 節範例 3 中所討論的序列空間（sequence space），若 V 中線性的移位算子（shifting operators）定義為

$$T_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$
$$T_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$$

(a) 證明 T_1 為一對一且非映成。

(b) 證明 T_2 為映成且非一對一。

解

(a) 因為觀察 R^∞ 中的不同序列會有不同的像，所以 T_1 為一對一。因為 R^∞ 中並無序列會被映射至 $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$，所以 T_1 非映成。

(b) 因為，例如，序列 $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ 和序列 $(2, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ 均被映射至 $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$，所以 T_2 非一對一。因為對每一可能的實數序列，均可就藉由適當選取 $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n$ 而得，所以 T_2 為映成。

範例 4 逆轉換

令 $T: R^3 \to R^3$ 為線性算子，且定義為

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

請問 T 是否為一對一？若是，則求 $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$。

解

根據 7.1 節的 (12) 式， T 的標準矩陣為

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

此矩陣為可逆矩陣，且從 7.1 節的 (17) 式可知 T^{-1} 的標準矩陣為

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

所以

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = [T^{-1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

將此結果展開為與原題目定義的轉換形式，可得

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - 3x_3, -11x_1 + 6x_2 + 9x_3, -12x_1 + 7x_2 + 10x_3) \quad \blacktriangleleft$$

範例 1　線性轉換之矩陣

令 $T: P_1 \to P_2$ 為線性轉換，且定義為

$$T(p(x)) = xp(x)$$

求相對於標準基底之 T 的轉換矩陣，

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{和} \quad B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

其中

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x; \qquad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

解

由轉換 T 所給定的方程式，可得

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$
$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

直接觀察可知 $T(\mathbf{u}_1)$ 和 $T(\mathbf{u}_2)$ 相對於基底 B' 的座標向量為

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此，相對於 B 和 B' 之 T 的轉換矩陣為

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

範例 2　三步驟程序

令 $T: P_1 \to P_2$ 為範例 1 中的線性轉換，且運用如圖的三步驟程序計算

$$T(a+bx) = x(a+bx) = ax+bx^2$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "\text{直接}", "\text{計算}"'] \arrow[d, "(1)"'] & T(\mathbf{x}) \\
{[\mathbf{x}]_B} \arrow[r, "\text{乘上 } [T]_{B',B}", "(2)"'] & {[T(\mathbf{x})]_{B'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}$$

解

步驟 1、相對於基底 $B = \{1, x\}$， $\mathbf{x} = a + bx$ 的座標矩陣為

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

步驟 2、$[\mathbf{x}]_B$ 左乘範例 1 之矩陣 $[T]_{B',B}$，可得

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

步驟 3、由 $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ 重建 $T(\mathbf{x}) = T(a+bx)$，可得

$$T(a+bx) = 0 + ax + bx^2 = ax + bx^2$$

（註：此範例雖然簡單，但所呈現的步驟可以運用到更複雜的問題！）

範例 3　線性轉換之矩陣

令 $T: R^2 \to R^3$ 為線性轉換，且定義為

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求轉換 T 相對於 R^2 基底 $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 R^3 基底 $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 之矩陣，其中

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解

由 T 的公式

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 線性組合的方式展開上述向量，可得

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

因此

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

範例 5　P_2 中的線性算子

令 $T: P_2 \to P_2$ 為線性算子，且定義為

$$T(p(x)) = p(3x-5)$$

亦即，$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x-5) + c_2(3x-5)^2$

(a) 求相對於基底 $B = \{1, x, x^2\}$ 之 $[T]_B$。

(b) 使用間接方法求 $T(1 + 2x + 3x^2)$。

(c) 以直接計算 $T(1 + 2x + 3x^2)$ 的方法驗證 (b) 的結果。

解

(a) 根據給定的 T 轉換，可得

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

所以

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

因此

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) **步驟 1**、相對於基底 $B = \{1, x, x^2\}$，$\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$ 的座標矩陣為

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

步驟 2、$[\mathbf{p}]_B$ 左乘 (a) 部分之矩陣 $[T]_B$，可得

$$[T]_B[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{p})]_B$$

步驟 3、由 $[T(\mathbf{p})]_B$ 重建 $T(\mathbf{p}) = T(1 + 2x + 3x^2)$，可得

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

(c) 直接計算

$$\begin{aligned} T(1 + 2x + 3x^2) &= 1 + 2(3x-5) + 3(3x-5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2 \end{aligned}$$

結果與 (b) 相同。◀

範例 1　代表相同的線性算子的相似矩陣

本節一開始就有矩陣

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad 和 \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

代表相同的線性算子 $T: R^2 \to R^2$。以求矩陣 P 使得 $D = P^{-1}CP$ 的方式，驗證此二矩陣為相似矩陣。

解

需要求解的是轉移矩陣

$$P = P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B\right]$$

其中，$B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$（如 (2) 式）為 R^2 的基底，且 $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 為 R^2 的標準基底。觀察可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

據此，可知

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 和 \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

因此，

$$P = P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

讀者可自行驗證得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \blacktriangleleft$$

範例 3　特徵空間之特徵值和基底

線性算子 $T: P_2 \to P_2$ 定義為

$$T(a+bx+cx^2) = -2c + (a+2b+c)x + (a+3c)x^2$$

試求其特徵之空間之特徵值和基底。

解

讀者可自行證明得線性算子 T 相對於標準基底 $B = \{1, x, x^2\}$ 的矩陣為

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

T 的特徵值為 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 2$（見 6.1 節範例 7）。由之前的範例可知，$[T]_B$ 相對於 $\lambda = 2$ 的特徵空間基底為

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

且 $[T]_B$ 相對於 $\lambda = 1$ 的特徵空間基底為

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩陣 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 相對於 B 之座標矩陣為

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = x, \quad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

因此，T 相對於 $\lambda = 2$ 的特徵空間基底為

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

且 T 相對於 $\lambda = 1$ 的特徵空間基底為

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

接著可利用 T 的公式檢驗以下轉換成立

$$T(\mathbf{p}_1) = 2\mathbf{p}_1, \quad T(\mathbf{p}_2) = 2\mathbf{p}_2, \quad 且 \quad T(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3 \quad ◀$$