線性代數

開課班級：應統一１

授課老師：郭清章

研究室:中商大樓5F (應用統計系)(7517)

Office hour:(五)16:10-18:00

Email:johnkuo@nutc.edu.tw

為什麼學線性代數

https://read01.com/zh-tw/dEkE8De.html#.W35xS-gzaUk

0.1導語

- 線性代數是數學中最基礎卻極其重要的一門學科，因為任何科學領域都繞不過線性代數，把線性代數稱數學中最有必要掌握的一門也不為過。

- 當然線性代數的作用遠不局限於數學中，在物理、工程、計算機、金融、人工智慧等科學領域中。

0.2解決線性系統

- 有一個籠子裡有好多雞和兔子和螞蟻，三個物種分別有22、44、66 只腳。雞和兔子加起來一共有 22 只腳，兔子和螞蟻加起來一共 46 只腳，雞和螞蟻加起來一共 60隻腳，請問三種動物各有多少。

- 設我們有雞 x 只、兔 y 只和螞蟻 z 只，那麼上面的條件可以寫為系統
- 2x+4y=22, 4y+6z=46, 2x+6z=60
- 通過線性代數的符號我們可以將這個系統寫為矩陣和向量的乘積
- $AX = b;\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 22 \\ 46 \\ 60 \end{bmatrix}$
- 使用 數學程式如matlab（或者手算，3x3 的矩陣並不大），
- 所以可以計算出有9只雞、1 只兔子和 7 只螞蟻。

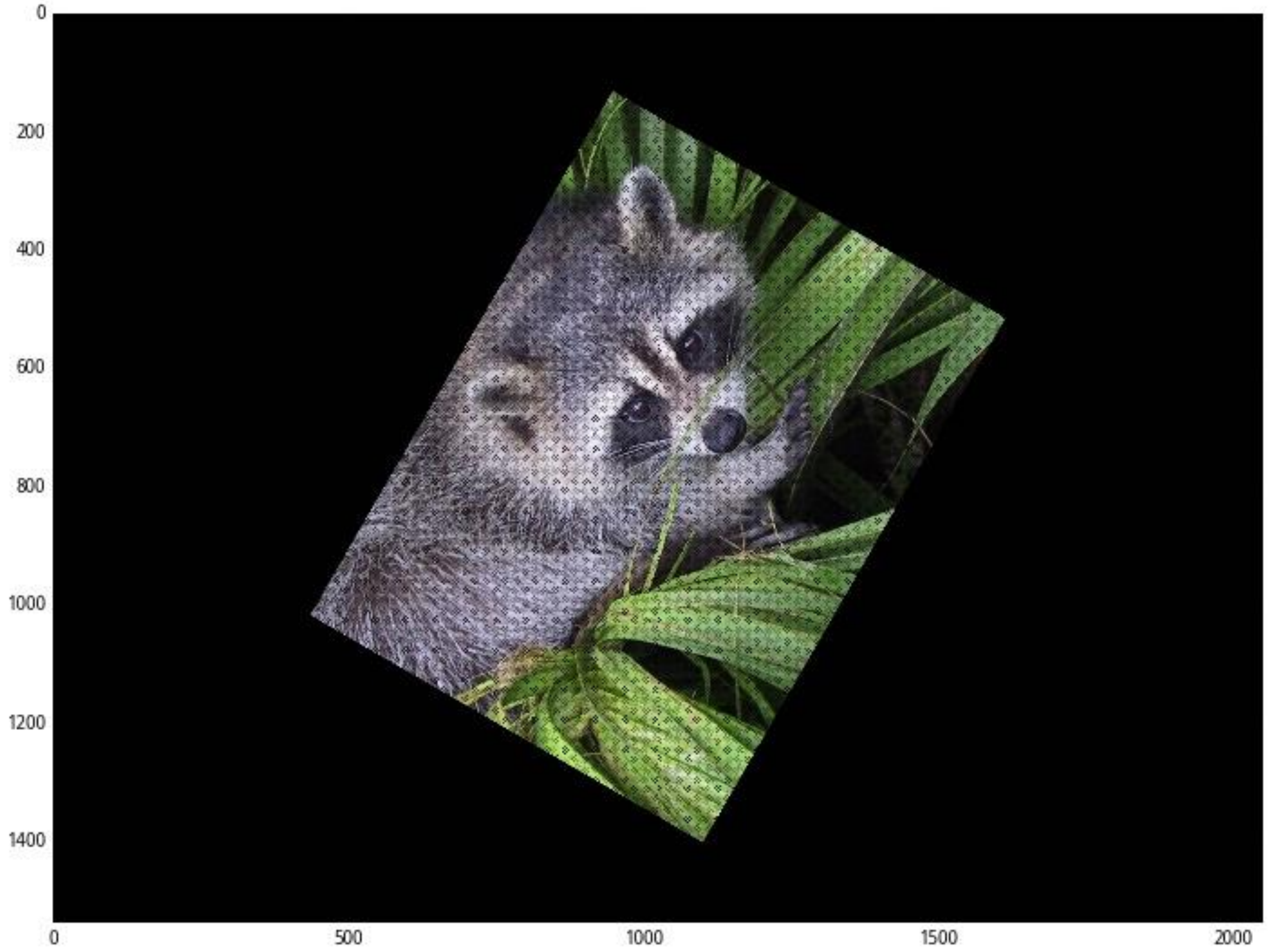
0.3空間的操作

- 線性代數中兩個主要的數學對象是空間本身，叫做**線性空間**，和對線性空間的各種操作，叫做**矩陣**，它等同於線性映射，有時也叫做線性變換。比如說一個二維的旋轉矩陣的形式

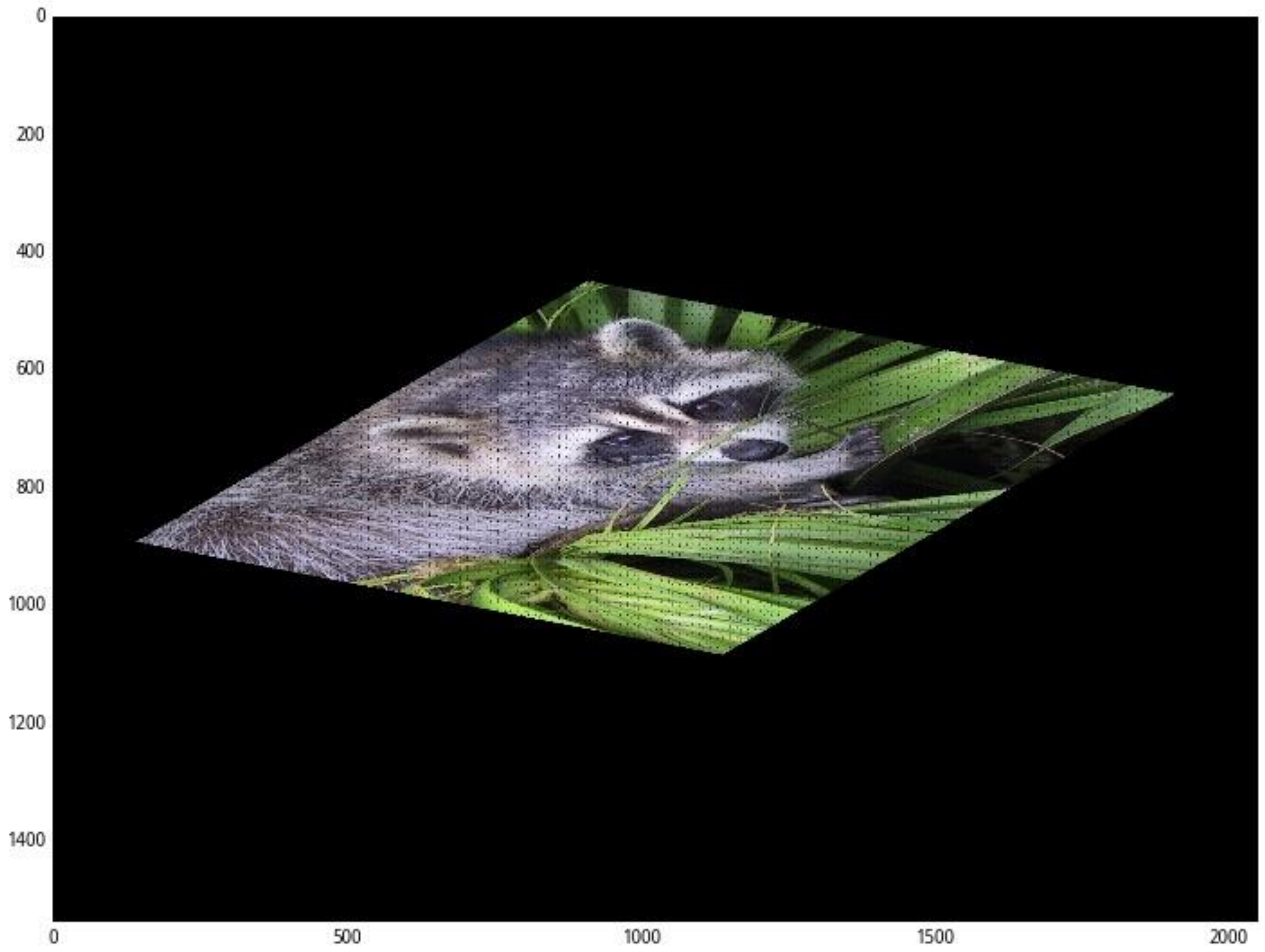
這個圖片的像素為 1024x768，它的信息被儲存為一個矩陣的數據

整個二維空間用旋轉矩陣進行變換

-

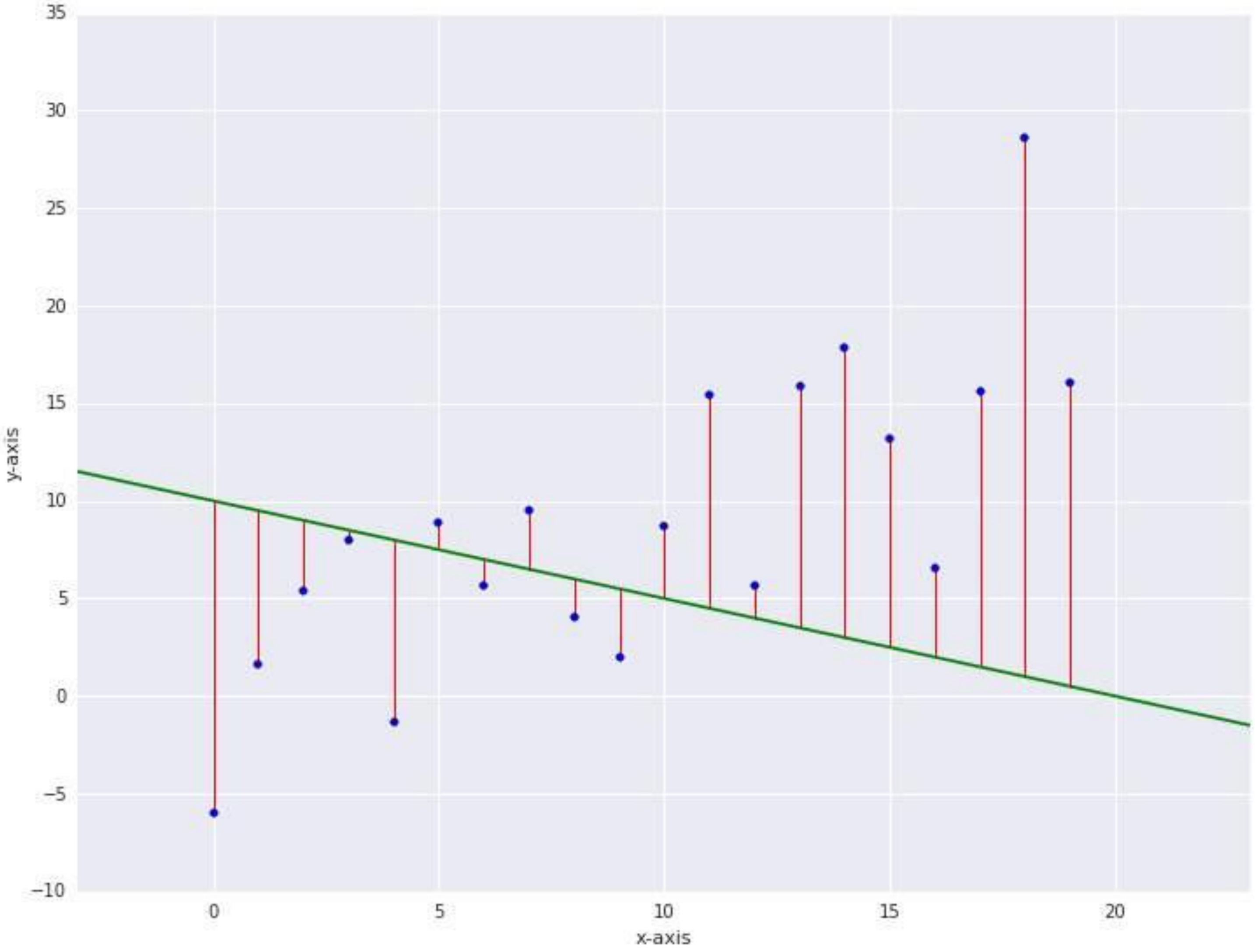


把圖片 按軸拉伸為倍並按軸擠壓為倍

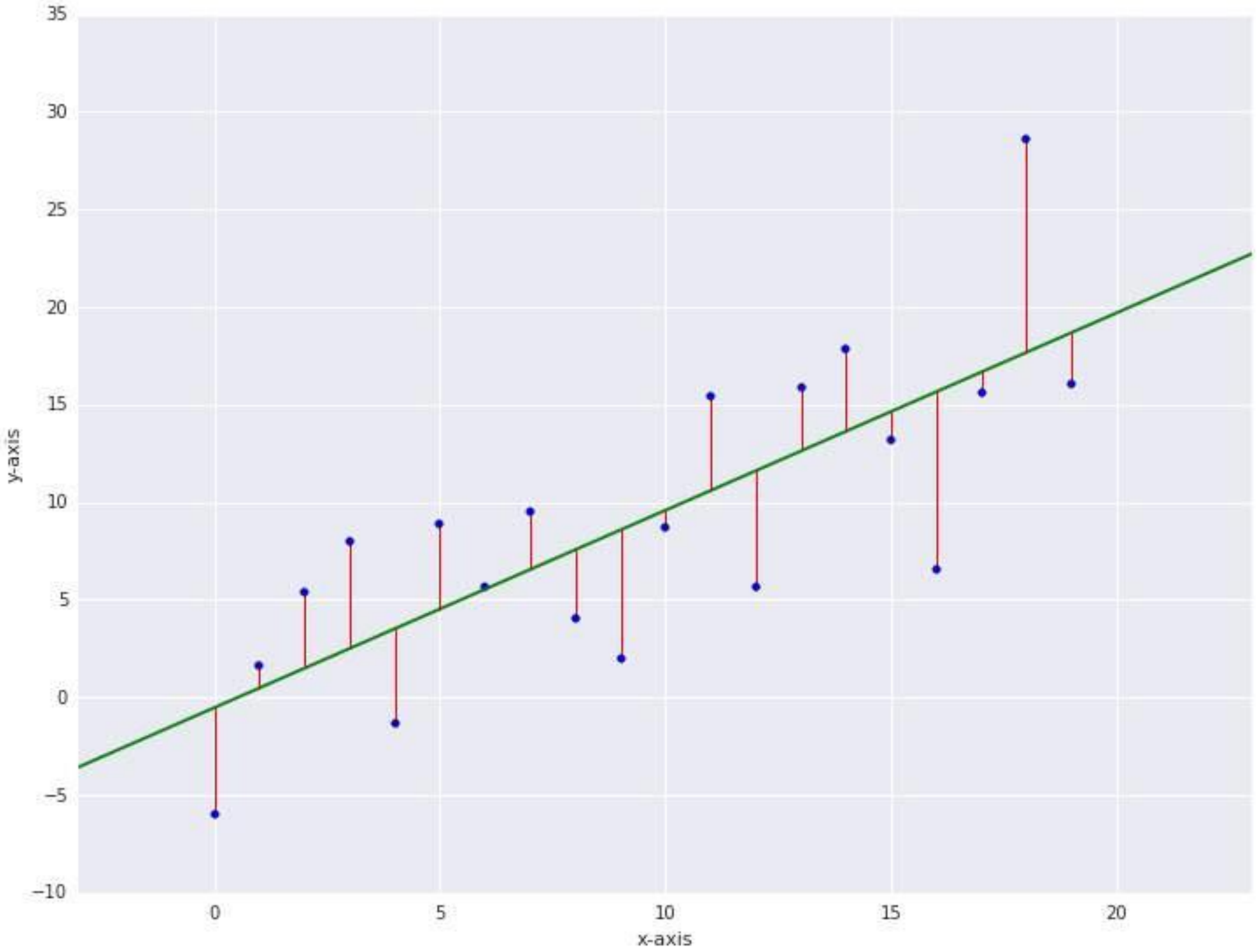


0.4線性回歸

- 線性回歸是統計學中一個常用的工具，給定一組二維空間上的點（後面圖中的藍點）
- 我們想找到一條線（後面圖中的綠線）
- 並希望這條綠線和這些藍點是最貼近的。評判「最近」的方法就是使數據點離之線的距離平方和（圖中紅色線段的平方的和）是最小的。


35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
y-axis
0
5
10
15
20
x-axis

矩陣微積分的方法，RSS 的值是最小的，下圖中的這條綠線。



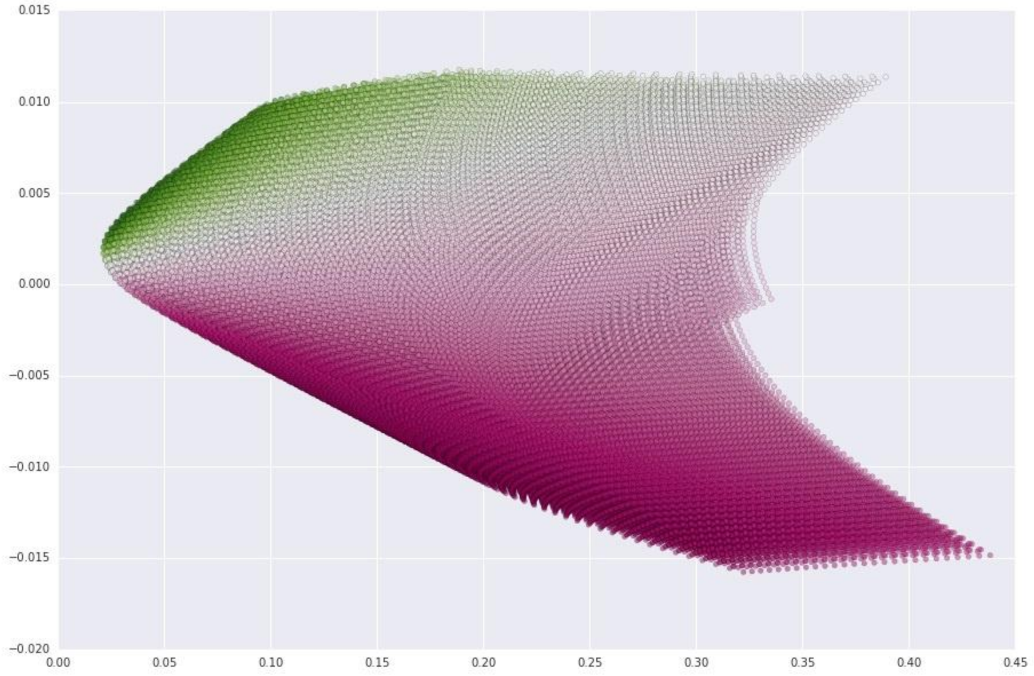
0.5MPT 資產配置

- 現代資產配置理論（MPT）的模型

  資產組合的期望和標準差放到坐標圖上構成一個子彈狀的圖像

$$\mathbb{E}[r_{\mathbf{w}}] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[r_i]$$

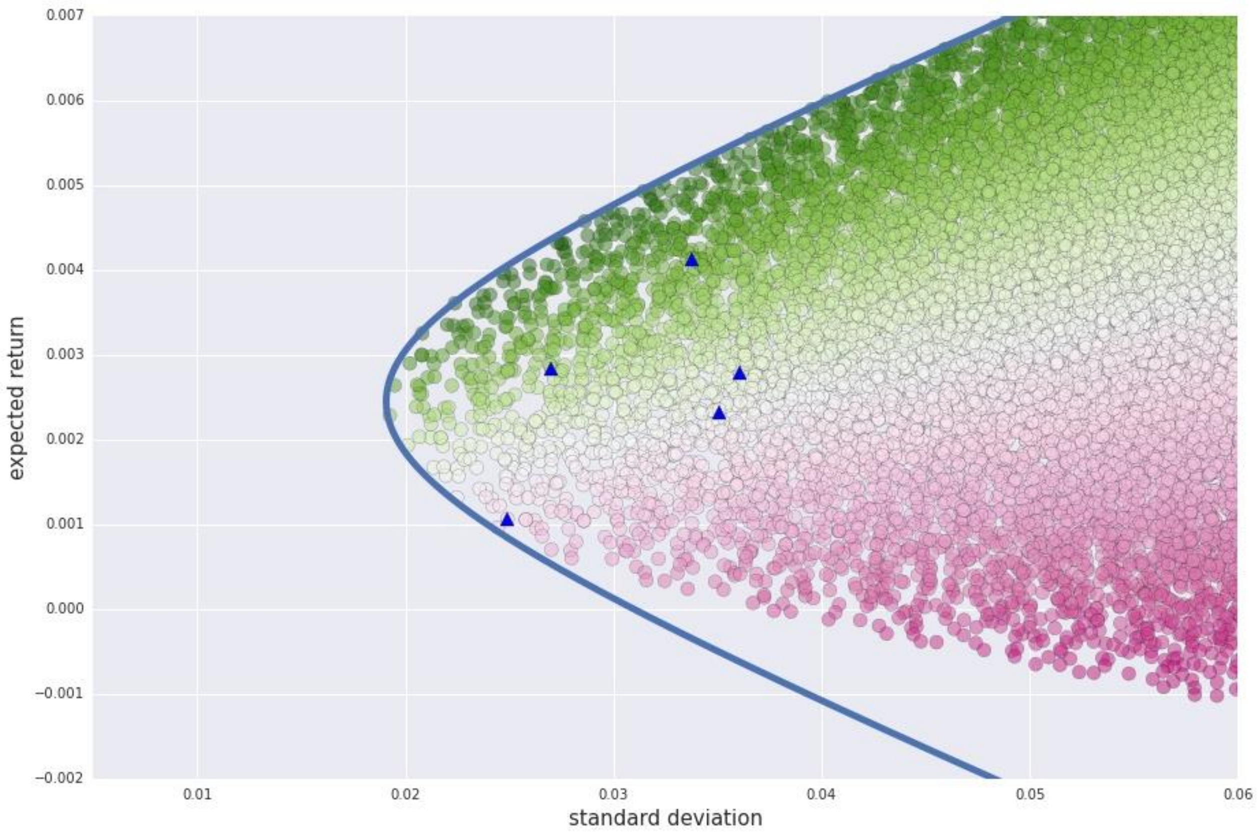
$$\mathrm{Var}[r_{\mathbf{w}}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i, r_j).$$



- 所有這些點在最左端勾勒出的曲線叫做有效前沿，是給定一個收益率能找到的風險最小的組合，這條曲線對於資產配置理論有著至關重要的意義，而計算出這條曲線就需要矩陣的幫助。定義**協方差矩陣**

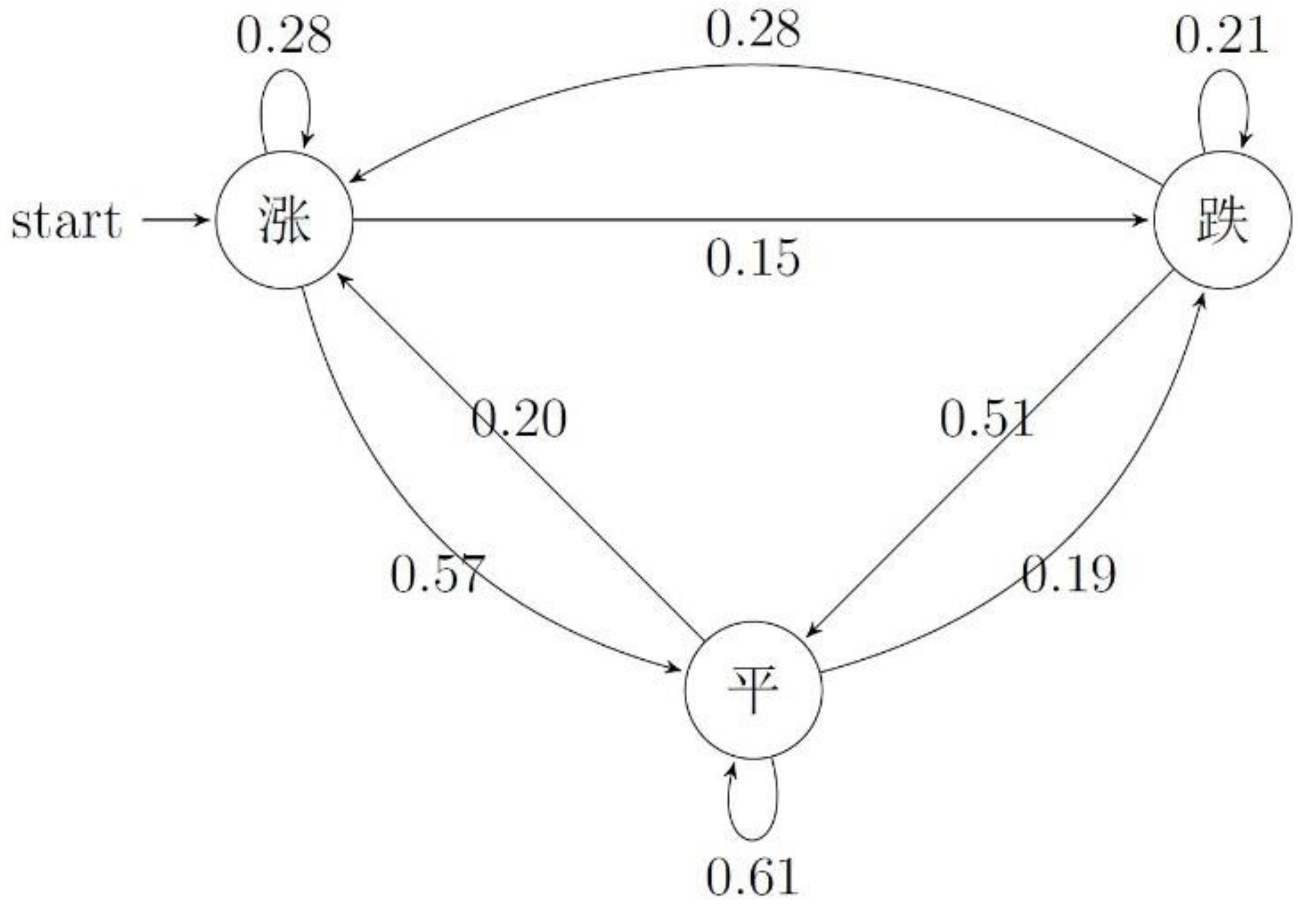
$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(r_1,r_1) & \mathrm{Cov}(r_1,r_2) & \dots & \mathrm{Cov}(r_1,r_n)\\ \mathrm{Cov}(r_2,r_1) & \mathrm{Cov}(r_2,r_2) & \dots & \mathrm{Cov}(r_2,r_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(r_n,r_1) & \mathrm{Cov}(r_n,r_2) & \dots & \mathrm{Cov}(r_n,r_n)\end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}=\begin{bmatrix}\mathbb{E}[r_1]\\ \mathbb{E}[r_2]\\ \vdots\\ \mathbb{E}[r_n]\end{bmatrix},\ \mathbf{1}_n=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}.$$

- 通過拉格朗日乘子，可以算出，設可以算出有效前沿的曲線
- 根據這個公式可以畫出有效前沿的曲線



0.6Markov 鏈

- Markov 鏈是隨機過程的一種，在這個鏈中每個時間點出現某種狀態的機率取決於上一個時間的狀態。比如，我們假設股市的漲跌符合 Markov 鏈的模型，將每天漲跌的狀態分為「漲」、「平」、「跌」三種。「漲」代表當天漲幅 1% 以上，「跌」代表當天跌幅 1%以上，當漲跌在正負 1% 之內時視為「平」。通過統計，我們得出下述機率關係：



0.28
0.28
0.21
start
涨
跌
0.15
0.20
0.51
0.57
0.19
平
0.61

- 在這個表中，從一個狀態到另一個狀態的數字代表從今天狀態到明天狀態的機率，比如說，如果今天漲，那麼明天繼續漲的機率是 28%，如果今天跌，那麼明天平的機率是 51% 。考慮這麼一個問題，如果當前的狀態是「漲」，那麼 2 天后狀態的機率分布是什麼？
- 解決這個問題需要使用轉移矩陣，這個矩陣的第列的第個數就是從狀態到狀態的機率，如下

$$
\begin{array}{cccc}
\text{涨} & \text{平} & \text{跌} & \\
\left[\begin{array}{ccc}
0.28 & 0.20 & 0.28 \\
0.57 & 0.61 & 0.51 \\
0.15 & 0.19 & 0.21
\end{array}\right] &&& \begin{array}{c}\text{涨}\\ \text{平}\\ \text{跌}\end{array}
\end{array}
$$

$$
T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{涨} & \text{平} & \text{跌} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.28 & 0.20 & 0.28 \\ 0.57 & 0.61 & 0.51 \\ 0.15 & 0.19 & 0.21 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{涨} \\ \text{平} \\ \text{跌} \end{array}
$$

- 想計算 2天後的狀態機率，我們取轉移矩陣的 2 次方
- 從第一列（也就是對應著「漲」的那裡一列）讀出來，如果今天是「漲」，那麼兩天後有23.44% ，的機率是漲，58.38%會平，另有18.18%機率會跌。
- 那如果是 250天之後呢？我們取轉移矩陣的 250 次方。運算雖然對於人腦來說有點大，但用計算機來算還是很快的(AI人工智慧)。

0.7結語

- 不學好線性代數是無法在這個世界生存下去的。

- PS:僅供參考

課程簡介：

- 學習內容包括線性連立方程式、矩陣基本運算、行列式、向量空間與基底、線性相依與線性獨立、線性轉換、正交空間、特徵值與特徵向量等。

主要教科書：

書名	作者	出版社	出版年度	版次	出版地
線性代數	Howard Anton and Chris Rorres (陳福坤編譯)	歐亞書局	2016	11	新北市
Elementary Linear Algebra with supplemental applications	Howard Anton and Chris Rorres	歐亞書局	2016	11	新北市

各週授課進度與內容		
週次	主題內容/章節	備註
第一週	CH4 一般化向量空間	
第二週	CH4 一般化向量空間	
第三週	CH4 一般化向量空間	
第四週	CH4 一般化向量空間	小考
第五週	CH5 內積空間	
第六週	CH5 內積空間	
第七週	CH5 內積空間	
第八週	CH5 內積空間	
第九週	期中考	
第十週	CH6 特徵值、特徵向量與矩陣對角化	
第十一週	CH6 特徵值、特徵向量與矩陣對角化	
第十二週	CH6 特徵值、特徵向量與矩陣對角化	
第十三週	CH6 特徵值、特徵向量與矩陣對角化	小考
第十四週	CH7線性轉換	
第十五週	CH7線性轉換	
第十六週	CH7線性轉換	
第十七週	CH7線性轉換	
第十八週	期末考	

評分方式及比重

- 1.四次小考：100%
- 2.出席率與學習態度：彈性調分