範例 1　加權式尤拉內積

令 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 為 R^2 中的向量，驗證加權式尤拉內積

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \tag{2}$$

滿足內積空間的四個公理。

解

公理 1：交換 (2) 式中的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，發現並不會改變等號右邊的值，所以 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$。

公理 2：若 $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$，則

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\
&= 3(u_1w_1 + v_1w_1) + 2(u_2w_2 + v_2w_2) \\
&= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle
\end{aligned}$$

公理 3：
$$\begin{aligned}
\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\
&= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\
&= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

公理 4：$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3(v_1v_1) + 2(v_2v_2) = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$ 且等號成立，若且唯若 $v_1 = v_2 = 0$，亦即，若且唯若 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$。 ◀

範例 3　R^2 中的特殊單位圓

(a) 使用尤拉內積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$，繪出 R^2 中 xy-座標系統的單位圓。

(b) 使用加權式尤拉內積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$，繪出 R^2 中 xy-座標系統的單位圓。

解

(a) 若 $\mathbf{u} = (x, y)$，則 $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$，所以單位圓的方程式為 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$，等號兩邊平方可得

$$x^2 + y^2 = 1$$

預料之中，此方程式的圖形為以圓點為中心、半徑為 1 的圓（如圖 5.1.1a）。

(b) 若 $\mathbf{u} = (x, y)$，則 $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$，所以單位圓的方程式為 $\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2} = 1$，等號兩邊平方可得

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

此方程式的圖形為圖 5.1.1b 的橢圓。　◀

範例 9　計值內積的運作

令 P_2 在以下點的位置具有計值內積

$$x_0=-2,\quad x_1=0,\quad \text{和} \quad x_2=2$$

求多項式 $\mathbf{p}=p(x)=x^2$ 和 $\mathbf{q}=q(\mathrm{x})=1+x$ 的 $\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle$ 和 $\|\mathbf{p}\|$。

解

根據 (10) 和 (11) 式知

$$\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle=p(-2)q(-2)+p(0)q(0)+p(2)q(2)=(4)(-1)+(0)(1)+(4)(3)=8$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}\|&=\sqrt{[p(x_0)]^2+[p(x_1)]^2+[p(x_2)]^2}=\sqrt{[p(-2)]^2+[p(0)]^2+[p(2)]^2}\\&=\sqrt{4^2+0^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

範例 1　R^4 中兩向量夾角的餘弦值

令 R^4 具備尤拉內積，求 $\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2)$ 和 $\mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$ 向量夾角 θ 的餘弦值。

解

計算可得

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \quad \text{及} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

所以

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}} \quad \blacktriangleleft$$

範例 6　正交補集的基底

令 W 為 R^6 的子空間，且是由下列向量所生成

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3),$$
$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15), \qquad \mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

求 W 的正交補集之基底。

解

子空間 W 與以下矩陣的列空間相同

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

因為 A 的列空間和核空間互為正交補集，此時問題簡化成需求此矩陣的核空間基底。在 4.7 節範例 4 中，已經證明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可為核空間基底。將這些向量改寫成逗號間隔形式的向量（以符合題目的 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ 向量形式），可得基底向量為

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

讀者可以使用點積，自行確認這些向量會正交於 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ 向量。◀

範例 4　相對於正則基底的座標向量

令向量

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

很容易地可知在尤拉內積的定義下，$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 為 R^3 的正則基底。試以 S 的向量對 $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ 做線性組合展開，並求座標向量 $(\mathbf{u})_S$。

解

讀者可自行驗證以下結果

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\tfrac{1}{5}, \quad \text{和} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \tfrac{7}{5}$$

依據定理 5.3.2 可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

亦即

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{7}{5}\left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

因此，$\mathbf{u}$ 相對於 S 的座標向量為

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle) = \left(1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5}\right)$$

範例 5　從正交基底變正則基底

(a) 證明以下的向量

$$\mathbf{w}_1 = (0, 2, 0), \quad \mathbf{w}_2 = (3, 0, 3), \quad \mathbf{w}_3 = (-4, 0, 4)$$

在尤拉內積定義下，為 R^3 的正交基底，並將此基底向量正規化後，求出正則基底。

(b) 將向量 $\mathbf{u} = (1, 2, 4)$ 以 (a) 部分所得的正則基底做線性組合展開。

解

(a) 所給定的向量可為正交集，因為

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = 0$$

根據定理 5.3.1 知，這些向量為線性獨立，且根據定理 4.5.4 知，這些向量可為 R^3 的基底。將 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 各自的長度除掉後，可得正規化後的正則基底

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) 根據 (3) 式可知

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

各分量為

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = (1, 2, 4) \cdot (0, 1, 0) = 2$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

因此，可得

$$(1, 2, 4) = 2(0, 1, 0) + \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \blacktriangleleft$$

範例 7　使用葛蘭 – 史密特正交程序

假設向量空間 R^3 具備尤拉內積，應用葛蘭 – 史密特正交程序將以下向量

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

轉換成正交基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$，並正規化後得出正則基底 $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$。

解

步驟 1、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

步驟 2、$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \operatorname{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

步驟 3、$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \operatorname{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

因此，

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

可為 R^3 的正交基底。而這些向量的模分別為

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以，R^3 的正則基底為

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad ◀$$

範例 8　雷建德多項式（Legendre Polynomials）

令向量空間 P_2 具備以下內積定義

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

運用葛蘭－史密特正交程序將 P_2 中的標準基底 $\{1, x, x^2\}$ 轉換成正交基底 $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)\}$。

解

取 $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$ 和 $\mathbf{u}_3 = x^2$，

步驟 1、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = 1$

步驟 2、因為

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

所以

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 = x$$

步驟 3、因為

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big]_{-1}^{1} = 2$$

所以

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

因此，得出正交基底 $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)\}$ 為

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = x^2 - \frac{1}{3} \quad \blacktriangleleft$$

範例 9　3×3 矩陣的 QR-分解

求以下矩陣的 QR-分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解

A 的行向量為

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

運用葛蘭—史密特正交程序並正規化所得的行向量，可得正則向量為（見範例 7）

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

因此，依據 (15) 式，R 為

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

可得 A 的 QR-分解為

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{Q}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

此時的方陣 Q 稱為「正則矩陣」或「么正矩陣」。 ◀

範例 1　最小平方近似

求 $f(x)=e^x$ 在 $[-1,1]$ 區間的一次多項式最小平方近似。

解

令所有一次多項式 $g(x)=a+bx$ 函數所成的函數空間 W，其為函數空間 $C[-1,1]$ 的子空間，則函數集合 $\{1,x\}$ 為 W 的正交基底，因為 $\langle 1,x\rangle=\int_{-1}^{1}(1\cdot x)dx=0$。各基底函數的模分別為

$$\|1\|^2=\int_{-1}^{1}(1\cdot 1)dx=2 \quad 和 \quad \|x\|^2=\int_{-1}^{1}(x\cdot x)dx=\frac{2}{3}$$

可得函數集合 $\{g_1,g_2\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right\}$ 為 W 的正則基底。

因此，$f(x)=e^x$ 在 $[-1,1]$ 區間的一次多項式最小平方近似 [W 對 $f(x)$ 的最小平方近似] 為

$$\begin{aligned}
\text{proj}_W f &= \langle f,g_1\rangle g_1+\langle f,g_2\rangle g_2\\
&=\int_{-1}^{1}\left(e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{-1}^{1}\left(e^x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)dx\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}x\\
&=\frac{1}{2}(e+e^{-1})+3e^{-1}x=1.54+1.1x
\end{aligned}$$

範例 2　最小平方近似

求 $f(x) = x$ 在 $[0, 2\pi]$ 區間的最小平方近似
(a) 以小於或等於 2 階的三角多項式為之；
(b) 以小於或等於 n 階的三角多項式為之。

解

(a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi \tag{9a}$$

對 $k = 1, 2, \ldots$，以分部積分法（integration by parts）可求得

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = 0 \tag{9b}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx = -\frac{2}{k} \tag{9c}$$

因此，在 $[0, 2\pi]$ 區間以的小於或等於 2 階的三角多項式做最小平方近似為

$$x \approx \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x$$

或者，以 (9a), (9b) 和 (9c) 式代入得

$$x \approx \pi - 2\sin x - \sin 2x$$

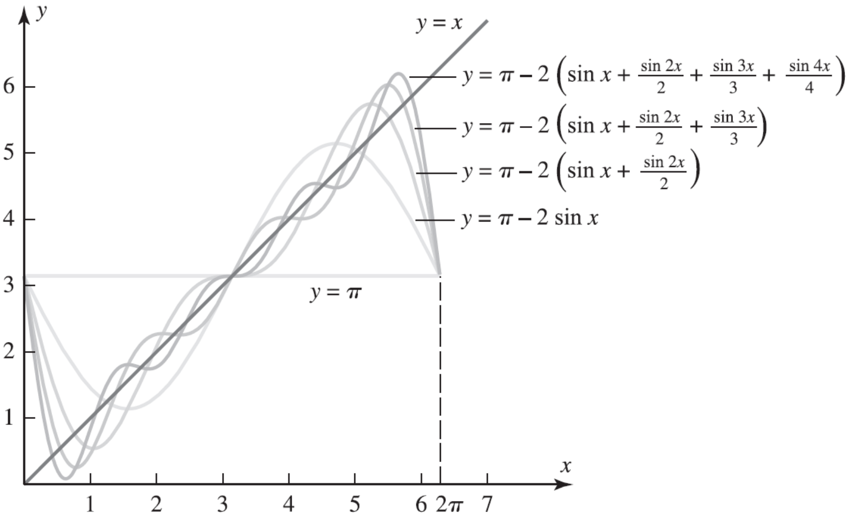
(b) 在 $[0, 2\pi]$ 區間以的小於或等於 n 階的三角多項式做最小平方近似為

$$x \approx \frac{a_0}{2} + [a_1\cos x + \cdots + a_n\cos nx] + [b_1\sin x + \cdots + b_n\sin nx]$$

或者，以 (9a), (9b) 和 (9c) 式代入得

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right)$$

$y = f(x) = x$ 的圖形和一些三角多項式的近似如圖 5.4.4 所示。



➲ 圖 5.4.4

很自然地我們期望均方誤差能隨著最小平方近似

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的項數增加而減少。可以證明 $C[0, 2\pi]$ 中的函數 f 在 $n \to +\infty$ 的情形下，均方誤差將趨近於零，這時可寫成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

方程式的右邊稱為 f 在區間 $[0,2\pi]$ 的傅立葉級數。這種級數在工程、科學和數學中都很重要。 ◀

範例 3　傅立葉級數

承上例，在片段連續的函數向量空間 $C_p[-\pi, \pi]$ 中的內積定義改為

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

求 $f(x) = x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 區間的 4 階傅立葉級數（函數空間為 W）近似。

解

$f(x)$ 的傅立葉級數近似為

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

已知正交基底函數為 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$，各基底函數的模為

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(1 \cdot 1)dx = 2\pi$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx \cdot \cos nx)dx = \pi$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(\sin nx \cdot \sin nx)dx$$

因此正則基底函數為

$$\{g_0, \cdots, g_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}$$

從函數空間為 W 來近似函數 $f(x)$ 為

$$\begin{aligned}
&\text{proj}_W f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \cdots + \langle f, g_n \rangle g_n \\
&= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + \cdots + \\
&\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx
\end{aligned}$$

可定義傅立葉級數的係數為

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_k = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right)dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

當 $f(x)=x$ 時，可求得傅立葉級數的係數

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin kx+\frac{1}{k^2}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos kx+\frac{1}{k^2}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

所以，從函數空間為 W 來近似函數 $f(x)$ 為

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

因此，$f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 區間的 4 階傅立葉級數近似為

$$f(x)\approx 2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x)$$