範例 2　正規化向量

試求一與 $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$ 同方向之單位向量 $\mathbf{u}$。

解

$\mathbf{v}$ 的向量長度為

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

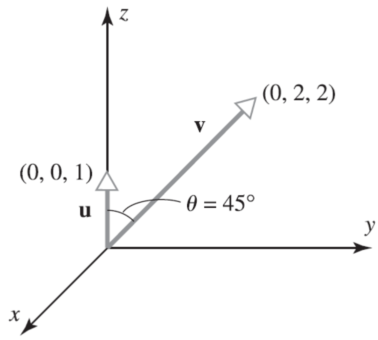
依 (4) 式所述

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

檢查一下，確認 $\|\mathbf{u}\| = 1$。 ◀

範例 5　點積

求圖 3.2.5 中向量的點積。



➲ 圖 3.2.5

解

向量的長度為

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \quad 且 \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

其夾角 θ 之餘弦值為

$$\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

因此，從 (12) 式得

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (1)(2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 2$$

範例 6　使用點積解幾何問題

求立方體中對角線和邊的夾角。

解

令 k 為立方體的邊長，且將立方體置於圖 3.2.6 的直角座標系。令 $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$,，則向量

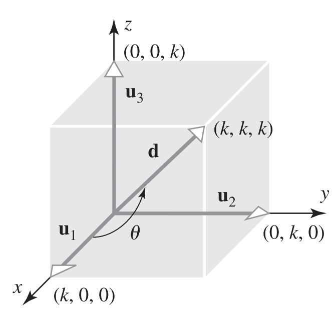
$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

為立方體的對角線。依 (13) 式知 $\mathbf{d}$ 和邊 $\mathbf{u}_1$ 的夾角 θ 關係為

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

計算得

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74° \quad ◀$$



➲ 圖 3.2.6

範例 7　使用向量分量形式計算點積

(a) 使用 (15) 式計算範例 5 中向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的點積。
(b) 計算下列 R^4 中向量的 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$。

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7), \quad \mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

解

(a)　$\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ 和 $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$，因此

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

與範例 5 所求得的結果相符。

(b)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4 \quad \blacktriangleleft$$

範例 1　正交向量

(a) 證明 R^4 中的 $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ 和 $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ 為正交。

(b) 令 $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 為 R^3 中之標準單位向量所成的集合，試證 S 中的任兩向量為正交。

解

(a)　因為 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$，所以兩向量正交。

(b)　必須證明任兩個不同的向量為正交，即

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

以幾何學來看，這非常明顯（如圖 3.2.2），但還是可以如下驗證

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad ◀$$

範例 3　正交於通過原點的直線和平面之向量

(a)　若方程式 $ax + by = 0$ 表示 R^2 中通過原點的直線。試證明由方程式係數所構成的向量 $\mathbf{n}_1 = (a, b)$ 正交於直線；亦即，正交於延著直線上的任何向量。

(b)　若方程式 $ax + by + cz = 0$ 表示 R^3 中通過原點的平面。試證明由方程式係數所構成的向量 $\mathbf{n}_2 = (a, b, c)$ 正交於平面；亦即，正交於平面上的任何向量。

解

在此，我們同時解這兩個問題，兩個方程式可寫為

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \quad \text{和} \quad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$$

或者，改以另一形式寫成

$$\mathbf{n}_1 \cdot (x, y) = 0 \quad \text{和} \quad \mathbf{n}_2 \cdot (x, y, z) = 0$$

這些方程式顯示向量 $\mathbf{n}_1$ 正交於在直線上的任何向量 (x, y)，及 $\mathbf{n}_2$ 正交於平面上的任何向量 (x, y, z)（如圖 3.3.1 所示）。　◀

範例 4　直線上的正交投影

求向量 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ 和 $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ 在直線 L 上的正交投影，其中直線 L 與 x 軸正向的夾角 θ 為正。

解

如圖 3.3.3 所示， $\mathbf{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 為延著直線 L 的單位向量，所以必須找出 $\mathbf{e}_1$ 向量在 $\mathbf{a}$ 上的正交投影。因為

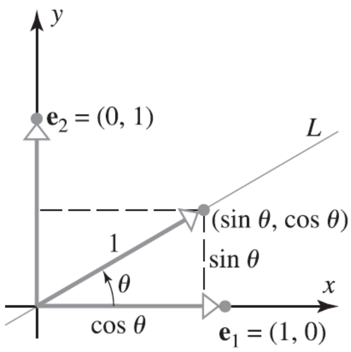
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \quad 且 \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a} = (1, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta$$

根據 (10) 式，正交投影向量為

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta)$$

同樣地，因為 $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a} = (0, 1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$，根據 (10) 式，正交投影向量為

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta)$$



➲ 圖 3.3.3

範例 5　u 在 a 上的分量向量

令 $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ 及 $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$，試求 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的分量向量與正交於 $\mathbf{a}$ 的分量向量。

解

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

因此， $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的分量向量為

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \tfrac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right)$$

且 $\mathbf{u}$ 在正交於 $\mathbf{a}$ 的分量向量為

$$\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

檢查後可確認向量 $(\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u})$ 垂直於 $\mathbf{a}$，因為兩者的點積為零。 ◀

範例 6　R^4 中的畢達哥拉斯定理

在範例 1 中已經證明向量

$$\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4) \text{ 和 } \mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$$

為正交，請驗證這些向量滿足畢達哥拉斯定理。

解

確認如下

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 5, 1, 3) \\
&\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 36 \\
&\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 30 + 6
\end{aligned}$$

亦即，$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$。 ◀