範例 3　根據第 1 列的餘因子展開式

使用矩陣 A 的第 1 列，進行餘因子展開式求行列式值

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

解

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

範例 4　根據第 1 行的餘因子展開式

針對範例 3 的矩陣 A，使用第 1 行進行餘因子展開式求 $\det(A)$

解

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

可以得到與範例 3 相同的解。

範例 3　使用列運算計算行列式值

給定矩陣 A，求 $\det(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

解

將 A 化為列梯形（上三角矩陣），再運用定理 2.1.2，所以

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$ ← 將 A 的第 1 列和第 2 列交換

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$ ← 將 A 的第 1 列的共同倍數 3 提出

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$ ← 將 A 的第 1 列乘上 –2 倍加到第 3 列

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$ ← 將 A 的第 2 列乘上 –10 倍加到第 3 列

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ ← 將 A 的第 3 列的共同倍數 –55 提出

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

範例 4　使用行運算計算行列式值

給定矩陣 A，求行列式值

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

解

行列式值的計算可使用基本列運算，將 A 化為列梯形，但經過觀察，其實可以將第 1 行乘上 –3 倍加到第 4 行後，將 A 變為下三角矩陣，則行列式值為

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546 \quad \blacktriangleleft$$

範例 5　使用列運算和餘因子展開計算行列式值

給定矩陣 A，求行列式值

$$A=\begin{bmatrix}3&5&-2&6\\1&2&-1&1\\2&4&1&5\\3&7&5&3\end{bmatrix}$$

解

將第 2 列使用適當的倍數加到其他列去，得

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&-1&1&3\\1&2&-1&1\\0&0&3&3\\0&1&8&0\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&1&3\\0&3&3\\1&8&0\end{vmatrix} \qquad \longleftarrow \text{以第 1 行做餘因子展開}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&1&3\\0&3&3\\0&9&3\end{vmatrix} \qquad \longleftarrow \text{將 } A \text{ 的第 1 列加到第 3 列}$$

$$=-(-1)\begin{vmatrix}3&3\\9&3\end{vmatrix} \qquad \longleftarrow \text{以第 1 行做餘因子展開}$$

$$=-18 \quad \blacktriangleleft$$

範例 7　使用伴隨矩陣求反矩陣

使用 (8) 式求範例 6 中 A 的反矩陣

解

已經求得 $\det(A) = 64$，因此

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

範例 8　使用克拉馬法則解線性系統

使用克拉馬法則解

$$
\begin{aligned}
x_1 + + 2x_3 &= 6 \\
-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\
-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

解

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},
$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}
$$

因此

$$
x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},
$$

$$
x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} \quad \blacktriangleleft
$$